CPI 2/S4

Exercice 1

Un sac contient 5 jetons verts et 4 jetons rouges.

1. On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités
   (a) de ne tirer que 3 jetons verts ;
   (b) de ne tirer aucun jeton vert ;
   (c) de tirer au plus 2 jetons verts ;
   (d) de tirer exactement 1 jeton vert.
2. On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).

Exercice 2

1. On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement k fois pile ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 fois pile ?
2. Un comité de 5 personnes doit être choisi parmi 20 hommes et 5 femmes. Quelle est la probabilité que le comité se compose de :
   (a) 4 femmes exactement ?
   (b) 4 hommes et 1 femme ?
3. On possède une cage de 35 lapins et 4 hamsters, on sort simultanément 3 animaux. Quelle est la probabilité d'avoir :
   (a) au moins un lapin ?
   (b) exactement un lapin ?
   (c) exactement 3 hamsters ?

Exercice 3

6 personnes doivent prendre place dans 3 voitures pouvant chacune recevoir de 0 à 6 passagers. Chaque personne choisit un véhicule au hasard.

1. Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
2. Quelle est la probabilité que dans chaque voiture montent exactement 2 personnes ?

Exercice 4

Un joueur dispose d'une pièce de monnaie équilibrée, qu'il lance deux fois. A chaque lancer, il gagne un euro s'il obtient pile , et perd un euro s'il obtient face.
On note A_1 (respectivement A_2) l'événement "le joueur obtient pile au premier lancer (resp. au second lancer)" et G la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur à l'issue des deux lancers.
Vérifier que les événements A_1, A_2 et $\{G = 0\}$ sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 5

On dispose d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "face" est $p \in]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Soit n un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants de la pièce décrite ci dessus. On note F_k l'événement "on obtient face au k-ième lancer" et P_k l'événement "on obtient pile au k-ième lancer". On cherche à calculer la probabilité qu'au cours de ces n lancers "face" ne soit jamais suivi de "pile". On note A_n cet événement.
   (a) Exprimer A_n en fonction des événements F_k et P_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$
   (b) En déduire $P(A_n)$.
2. Si l'on admet que l'on peut lancer indéfiniment la pièce, est-il possible que "face" ne soit jamais suivi de "pile".

Exercice 6

1. Soient A et B deux événements. Montrer que

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B) \leq min(P(A), P(B))$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et tous les événements $A_1, \ldots, A_n$,

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

Exercice 7

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements. On note

$$A = \limsup_{n} A_n = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

On suppose que $\sum_{n\geq 0} P(A_n) < \infty$. Pour $n \geq 1$, on note $D_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

1. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} P(D_n) = 0$
2. En déduire que $P(A) = 0$. Interpréter ce résultat.

Exercice 8 — Devoir à la maison.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note :

$$\Phi(n) = Card\{1 \leq p \leq n/p \wedge n = 1\}$$

Soit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition de n en produit de facteurs premiers. Le but est de démontrer que :

$$\Phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

On tire au hasard un entier compris entre 1 et n. On note A l'événement "le nombre obtenu est premier avec n", et pour $i \in [1; k]$, on note A_i l'événement "le nombre obtenu est divisible par p_i".

1. Définir un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire.
2. Exprimer $P(A)$ en fonction de $\Phi(n)$ et n.
3. Montrer que $\forall i \in [1; k]$, $P(A_i) = \dfrac{1}{p_i}$.
4. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_k$ sont indépendants.
5. Exprimer A en fonction des A_i et en déduire que :

$$\Phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$